アインシタインの相對原理

山本一清

二、アインシタインの出現（續き）

アインシタインは、右に述べたやうな學問上の難題を解くために、運動學や電氣磁氣學の理論を研究し、遂に學問上の一般原理として左の二箇條の公理を認むるに至つた。

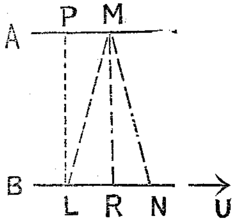
第一公理。 物理學の諸法則は、何れの座標軸で取扱つて見ても常に同一である。

第二公理。 光の速度は一定不變で、光源や觀察者の都合には無關係である。

そもそもガリレオやニウトンの運動學の第一法則に『總ての物體は、若しも其れに外からの力が働かなければ、靜止してゐる物は何時までも其のまゝだし、運動してゐるものは何時までも其の一樣な運動を續けて一直線に進んで行く』といふのがあつて、之れが物體の運動を論ずる場合の根本原則になつてゐる。法則の内容は別に珍しがる程のものでは無いが、一つ見逃してはならない事がある。それは、力が働かない場合には、靜止してゐるものも、運動してゐるものも、全く同樣に其の現狀を維持して行くといふことで、運動と靜止との間に何の區別もない。換言すれば、運動してゐる物にも、靜止してゐるものにも、全く同樣に、力といふものは作用するのである。又言ひかへれば、力の關係は、運動せる座標軸にも、靜止せる座標軸にも同樣である。――アインシタインは、此の考へを、更に廣く一般の物理法則に應用する見込みをつけたのである。

第二公理は、或る考へ方によつては、非常に勝手な言ひ方のやうにも考へられるけれど、それは多く光を物質的なエーテル波であるといふ在來の觀念に囚はれてゐるから起る疑ひなので、後に漸次この事情はわかつて來るから、今は深く立ち入らないで、此の公理を、實驗的には少くとも證明されたもの（例へばアラゴや實驗やマイケルソン・モーレーの實驗で）として認めて置かう。

アインシタインの二つの公理から、どんな結果が出で來るかといふに先づ第六圖に於て、BはAに對して、矢の方向に一秒ｖ尺の速度で動いてゐる世界であるとする。(運動は相對的であるから、BがAに對して動いてゐると考へても、AがBに對して逆の方向に動いてゐると考へても何れでも好いのである。今は、かりに、Bが動くとしておく。)さて今、A世界のP點から光をB世界へ直角に送つたとし、L點に鏡があるとすれば、光は反射して再びPに歸つて來る。此の光の往復に要した時間をT秒とAの觀測者が測つたとする。PLの距離はD尺とする。故に、光の速度を一秒c尺とすれば



第六圖

$$2D_R = c \times T_{秒}$$

次に、こんどはBからAへ光を送つた場合には、Lから出發してAに直角に當つた光りは、歸つて來た時に、Lは最早元のLに居ないで、N點に來てゐる。故にBは、LからMへ、又MからNへ歸つた光を受けることゝなる。光の道のり全體に要した時間をT'とし、直角三角形の理により

$$LMN = 2 \times LM = 2 \times \sqrt{MR^2 + LR^2} = 2\sqrt{D^2 + \left(v \times \frac{T'}{2}\right)^2}$$

$$= 2\sqrt{\left(c \times \frac{T}{2}\right)^2 + \left(v \times \frac{T'}{2}\right)^2} = \sqrt{(cT)^2 + (vT')^2}$$

しかるに

$$LMN = (cT')$$

故に

$$c^2T'^2 = c^2T^2 + v^2T'^2$$

即ち

$$\left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)T'^2 = T^2$$

又

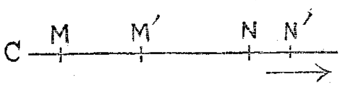
$$T' = \frac{T}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

即ちBで測つた時間が、Aの時間の $\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$ 倍となつて來るが、事實は如何かといふと、TもT'も、それぞ〱の時計面では同じ時間である、何故かといふと、前にも述べた通りBが動くと見るのも、Aが動くと見るのも要する相對的で、現象そのものは同じ現象を見てゐるのだから。それにもかゝはらず、計算上でT'がTより大きいと出て來るのは、時計の歩みに原因があるのである。言ひ換へれば、靜

止の世界から見れば、運動してゐる世界の時計は一秒が $\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ 秒の割合に遅れると見えるのである。

次に又、第七圖に於いて、Cなる世界が靜止してゐるとせば、Mから出た光はNで反射して再びMに歸つて來る筈である場合に、若し此のC世界が一秒v尺づゝで矢の方角へ動いてゐるとせば、光はMからN'まで進む間に、N點はN'に進み、光がN'から反射して歸つて來る途中で、既に元のMはM'まで進んで來てゐるから

$$\frac{NN'}{MN'}=\frac{v}{c}$$



第七圖

故に $NN'=MN'\times\frac{v}{c}$

二倍して $2NN'=(MNM+2NN')\times\frac{v}{c}$

まとめて $2NN'\left(1-\frac{v}{c}\right)=MNM\times\left(\frac{v}{c}\right)$

故に $2NN'=MNM\times\frac{\frac{v}{c}}{1-\frac{v}{c}}$

又 $\frac{MM'}{MN'M'}=\frac{v}{c}$

即ち $MM'=MN'M'\times\frac{v}{c}$

故に $\frac{MN'M'}{MNM}=\frac{MNM-MM'+2NN'}{MNM}$

$$=1-\frac{MN'M'}{MNM}\times\frac{v}{c}+\frac{2NN'}{MNM}$$

まとめて $\frac{MN'M'}{MNM}\left(1+\frac{v}{c}\right)=1+\frac{v}{c-v}$

$$=\frac{c}{v-c}=\frac{1}{1-\frac{v}{c}}$$

故に結局 $\frac{MN'M'}{MNM}=\frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2}=\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}\times\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$

これで見ると、同じ現象を、動いてゐる世界で測つた道のりはMN'M'であり、靜止してゐる世界で測つた道のりはMNMであり、前者が後者の $\frac{1}{1-(\frac{v}{c})^2}$ 倍になつてゐる。此の此の一半は前頁で述べた通り時計の歩みが、運動世界に於いては $\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ 倍だけ遲くなつてゐるのによるのであるが、他の $\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{v}{c})^2}}$ は、運動してゐる世界に於いて、距離の單位が此の割合だけ延びたことになるのである。

故に、世界(即ち座標軸)が運動してゐると考へる

場合には、時間の單位も、距離も、同じく$\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$だけ大きくなり、從つて、かやうな單位で測つた時間と距離との大きさは短縮することになる。

さて、第五圖に立ち歸つて、O′X′Y′Z′軸とOXYZ軸に對して運動を始める瞬間に共通の原點から光を四方に發したとすれば、t及t′秒後には、光波はP點に達したとして、第二公理により光の速度は一定であるから

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

$$x'^2+y'^2+z'^2=c'^2t'^2$$

此の二つの式が同時に成立するがためには、ロレンツは次の條件を得た。

$$\left.\begin{array}{l} x'=\dfrac{x-vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \qquad y'=y. \qquad z'=z. \\ t'=\dfrac{t-\frac{xv}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} \end{array}\right\} \text{(三)}$$

卽ち靜止世界では$x\ y\ z\ t$といふ座標系を用ひ、運動世界では$x'\ y'\ z'\ t'$といふ座標を用ひれば、一般の物理現象は、それぞれの世界で全く同一の法則の下に行はれるのであるが、此の二組の座標系の間には(三)の關係があるのである。此の(三)をロレンツ・アインシタインの座標關係式といふ。此の式の中に$v=0$とおく時は(三)が(二)と同じものになつて了ふ。故にガリレオ・ニウトンの關係式はロレンツ・アインシタインの式の特別に簡單な場合で、座標系の相互の運動速度が殆んど零に近い場合の關係であることが知れる。

又、(三)のx'でt'を除して見ると。

$$\frac{x'}{t'}=\frac{x-vt}{t-\frac{vx}{c^2}}=\frac{\frac{x}{t}-v}{1-\frac{x}{t}\times v\frac{1}{c^2}}$$

こゝでx'/t'やx/tは物の速度を表はす量であるが、此の場合に$\frac{x}{t}=c$と置く、卽ち靜止系の光の速度とすれば、此の光の速度は運動世界では如何かといふと。

$$c''=\frac{c-v}{1-\frac{v}{c}}=(c-v)+\frac{v}{c}(c-v)=c$$

但しv^2以下は非常に小さいから略したのであるが、之れで見ると、光の速度は運動系から見てもやはり一定のcである。故に、光の速度に對しては、他の如何なる速度を加へても、やはり加へた結果は光の

を四次の座標卽ち $x\ y\ z\ t$ で表はすべきものであると言ひ出した。此の場合 $x\ y\ z$ と t とは根本的に異つた性質の座標でなく、(三)の關係式にも明かなる如く運動してゐる座標軸の速度 v の如何によつて x' の速度であるといふ事になる。

前頁下段第九行の式に

$$\frac{x'}{t'}=V \qquad \frac{x}{t}=v'$$

とし、v の代り -v を置くと。

$$V=\frac{v'+v}{1+\frac{v'\times v}{c^2}} \qquad (四)$$

となる。之れは加法定理の公式と稱して重要なものである。例へば、前述第二五ページのフイゾーの實驗の場合には、水中での光の速度は c/n であるし、水は又 v なる速度で流れて居るのであるから、水の外に居る觀測者にとつては水中の光の速度は

$$\frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{c}{n}\times\frac{v}{c^2}}=\left(\frac{c}{n}+v\right)-\frac{v}{nc}\left(\frac{c}{n}+v\right)$$

$$=\frac{c}{n}+v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

となつて、フレネルの引ずり係數に相當する項が右邊に附加されて來る。其の他、アラゴやマイケルソン・モーレー等の實驗の結果は、アインシタインの二つの公理から明瞭に說明が出來るし、又、エアリーの水望遠鏡の結果は、フイゾーの實驗の場合と同じやうに、加法定理から說明出來る。

十九世紀の末頃から、物質の根本要素たる電子の實驗的性質が漸次明白になり、殊に、電子の中に非常な大速力で飛ぶものも存在することが知れて來たのであるが、かやうな大速力の電子の質量は、速度の大きなもの程、大となるらしい現象が一八八一年頃既に、英國 J. J. タムソン等によつて暗示された。ロレンツやアブラハム等は、此の理論を硏究し、種々の假定の下に、電子の構造說を唱へた。アインシタインは亦、相對原理によりて、靜止した世界から見て m なる質量のものは、運動せる世界から見れば

運動の方向に　縱質量　$\frac{m}{\left[1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}$

それと直角の方向に　橫質量　$\frac{m}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$

だけの質量に見えるものであるといふ結論に達した。

更に又、ミンコフスキー(H. Minkowski 一八年生 一九〇九年死)

は一九〇八年八月、獨逸ケルン市で開かれた科學會席上の「空間と時間」といふ題の講演に於いて時間と空間とには非常に密接な又交換的な關係のあることとを指摘し、今後、空間を三次の座標で表す代りに、「世界」を四時の座標卽ち$x\,y\,z\,t$で表はすべきものであると言ひ出した。此の場合$x\,y\,z$とtとは根本的に異つた性質の座標でなく、(三)の關係式にも明かなる如く運動してゐる座標軸の速度vの如何によつてx'の中にはtの分量が多く入り、又、t'の中にはxの分量が含まれものである。換言すれば$x\,y\,z\,t$系と$x'y'z't'$系との關係は、四次空間に於いて、$x\,t$平面內に或る一定量の座標軸廻轉を行つた關係となるのである。

　かやうにして、時間と空間との尺度は吾人が運動世界に住むか靜止世界に住むかの見地の違ひによつて定めらるべきものであり、又、時間と空間との相互の區別さへも、根本的には認むべからざるものといふ見解が明かになつて來た。

　因に言ふ。ガリレオ・ニウトンの空間や時間が、ロレンツ・アインシタインの空間や時間と、其の性質に於いて大なる違ひのあるものであり、更にミンコフスキの四次世界が珍らしい觀念であるには違ひないが、例へば(三)の關係式で計算した場合に、一秒三十萬キロメートルの速度で運動してゐる我が地球を、太陽から見て、如何程の收縮が現はれるかと言へば、僅かに地球は直徑が六センチメートルだけ收縮することになるに過ぎない。(つゞく)

東京通信

十二月五日曉の小獅子座新流星雨

去る十二月五日曉四時頃平常より流星の數多きを知り午前四時十五分より五時十分迄東京小石川の自宅に於て觀測の結果五六十個の流星を目擊し四十六個の經路を記錄せり、其中四十四個は小獅子座β星の附近を輻射點とする流星群なるを知れり、當時天空上の一部分には暫時靄ありしため其實數は之よりは遙かに多かるべし、光度は二等乃至四等半なり、翌六日曉には十五分間注意せしも同流星群を認めず。(井上)

消息

東京帝國大學教授理學博士平山信、同平山清次(會員)及び同助教授理學士早乙女清房氏(會員)は今回、東京天文臺技師を兼任した。又、先頃歸朝した橋元昌矣氏(理學士、元緯度觀測所技師)は東京天文臺技師(專任)となつた。